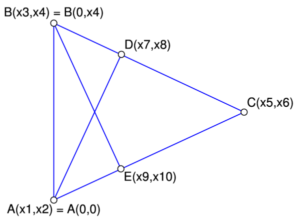
Avtomatsko dokazovanje v geometriji

Zlatan Magajna

Osnovni principi dokazovanja

- Algebrske metode
- Metode geometrijskih količin (ploščin, kotov)
- Metoda podatkovne baze (GDD)

Algebrska metoda (ilustracija)

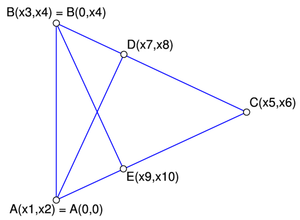


- **Hipoteza.** Imamo enakokrak trikotnik ABC, D je nožišče višine na BC, E je nožišče višine na AC.
- **Posledica.** AD ≅ BE.

V konstrukciji zaporedoma dodajamo točke (x_i,x_{i+1}) in generiramo polinomske enačbe, ki jim morajo ustrezati koordinate/ spremenljivke.

Tudi dokazovano posledico izrazimo s polinomsko enačbo.

Algebrska metoda (ilustracija)



Hipoteze:

CAB je enakokrak: **|AC|²=|BC|²**

2x4x6 - x4^2 =0

DA ⊥ BC: **AD·BC=0**

D ∈ BC: **BD×BC=0**

(x6 - x4)x8 + x5x7 =0

x5(x8 - x4) + (-x6 + x4)x7 =0

EB ⊥ AC: **EB·AC=0**

E ∈ AC: **AE×AC=0**

x6x10 + x5x9 - x4x6 =0

x5x10 - x6x9 =0

Posledica:

AD ≅ BE **|AD|²=|BE|²**

x10^2 - 2x4x10 + x9^2 - x8^2 - x7^2 + x4^2 =0

Algebrska metoda
(Wu 1977, Buchenberg, 1965)

pogoji

- $p_1(x_1,x_2,\dots x_k)=0$
- $p_2(x_1,x_2,\dots x_k)=0$
- ....
- $p_n(x_1,x_2,\dots x_k)=0$

$\Rightarrow$ posledica

$s(x_1,x_2,\dots x_k)=0$

$$\boldsymbol{s(x_1,x_2,\dots x_k)} = r_1(x_1,x_2,\dots x_k)\cdot \boldsymbol{p_1(x_1,x_2,\dots x_k)} + \dots + r_n(x_1,x_2,\dots x_k)\cdot \boldsymbol{p_n(x_1,x_2,\dots x_k)}$$

24.10.2017 Z. Magajna, EM

Algebrska metoda
(Wu 1977, Buchenberg, 1965)

pogoji

- $p_1(x_1,x_2,\dots x_k)=0$
- $p_2(x_1,x_2,\dots x_k)=0$
- ....
- $p_n(x_1,x_2,\dots x_k)=0$

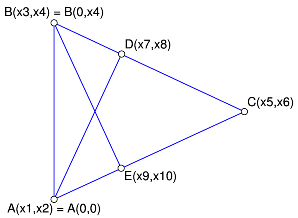
$\Rightarrow$ posledica

$s(x_1,x_2,\dots x_k)=0$

$$q(x_1,x_2,\dots x_k)\cdot \boldsymbol{s(x_1,x_2,\dots x_k)} = r_1(x_1,x_2,\dots x_k)\cdot \boldsymbol{p_1(x_1,x_2,\dots x_k)} + \dots + r_n(x_1,x_2,\dots x_k)\cdot \boldsymbol{p_n(x_1,x_2,\dots x_k)}$$

24.10.2017 Z. Magajna, EM

Algebrska metoda (ilustracija)



Hipoteze:

2x4x6 - x4^2 =0

(x6 - x4)x8 + x5x7 =0

x5(x8 - x4) + (-x6 + x4)x7 =0

x6x10 + x5x9 - x4x6 =0

x5x10 - x6x9 =0

Posledica:

x10^2 - 2x4x10 + x9^2 - x8^2 - x7^2 + x4^2 =0

Končne postavke nedegeneriranosti (+ morebitni ostanek):

BC je ne-izotropna (t.j. **BC** ima smer)

AC je ne-izotropna (t.j. **AC** ima smer)

x6^2 - 2x4x6 + x5^2 + x4^2 = 0

x6^2 + x5^2 = 0

Algebrska metoda

- Poznanih je več tehnik, vse so konceptualno zahtevne in računsko zelo zahtevne.
- Tudi zelo preprosti geometrijski problemi so lahko za osebne računalnike prezahtevni .
- Najbolj poznani sta Wujeva metoda in metoda z Groebnerjevo bazo.
- Rešitev problema ni enolična (različne postavke nedegeneriranosti).
- Geometrijska interpretacija postavk nedegeneriranosti je lahko zelo zahtevna.
- Tovrstni dokazi so izjemno obsežni algebrski izračuni, ki omogočajo geometrijske interpretacije.
- Metoda lahko daje presenetljive rezultate o resničnosti geometrijske trditve, ker se ne zavedamo skritih predpostavk.

Metode količin (metoda kotov, metoda ploščin)

Princip

- Pogoje in posledico izrazimo z običajnimi in umetelnimi geometrijskimi količinami (npr. 'polni koti', orientirane ploščine, 'Pitagorova razlika').
- Iz zaporedja pogojev (konstrukcijskih korakov) zaporedoma izoliramo novo nastopajoče količine.
- Izračunane količine vnesemo v enačbo posledice in preverimo enakost.

Prednosti in slabosti

- Uporabljene geometrijske količine so neobičajne.
- Posamezne metode rešujejo le določene tipe geometrijskih problemov. Ne nujno uspešno.
- Metode omogočajo geometrijsko interpretacijo dokaza. Dobljeni dokaz je lahko nenavaden in dolg.

Metoda podatkovne baze (GDD)

Princip

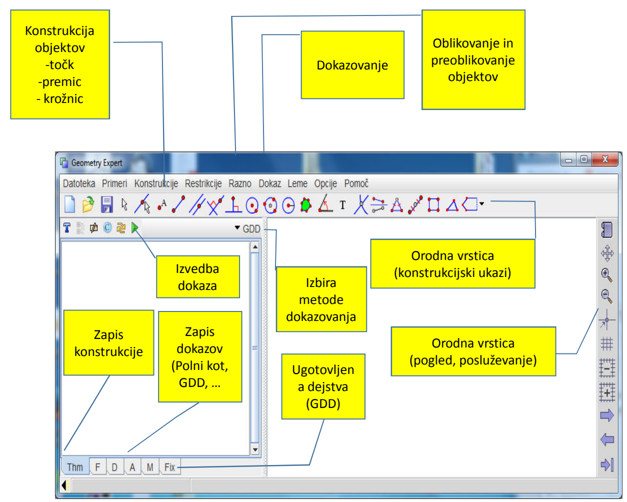
- Obravnavamo le najosnovnejše geometrijske objekte (točka, premica, krožnica, kot med premicama).
- Metoda izhaja iz sistema privzetih izrekov (lem).
- Iz hipotez o danih točkah metoda generira vse posledice hipotez, ki izhajajo iz privzetih izrekov.

Prednosti in slabosti

- Metoda izdela kolikor toliko berljiv dokaz
- Pogosto je dokaz drugačen od „običajnih postopkov".
- Metoda (načeloma) ne generirano novih točk (objektov) in je lahko neuspešna že v preprostih situacijah.
- Metoda ne dokazuje privzetih izrekov, tako da dokaz lahko vsebuje 'neočitna' dejstva.

JGEX (Java Geometry Expert)

- Avtorji: Chou, Gao, Ye (2009)
- Je Java implementacija starejšega sistema EX.
- Je zelo prijazen program, a tehnično nedodelan, nedokončan'.
- Izvaja postopke vseh treh vrst metod, omogoča zapis ročnega dokaza.
- Vizualizira postopek dokazovanja.
- Objekti so le točke, premice in krožnice. Daljice, poltraki so le drugače narisane premice.
- Koti pomenijo medsebojno lego premic, torej ne razlikuje med kotom in suplementarnim kotom.



Postopek dokazovanja z JGEX

- Izdelamo konstrukcijo
- Dodelamo podrobnosti (poimenovanja, oblike črt ipd.)
- Določimo dokazovano trditev (Dokaz|Dokazovana lastnost). Lahko jo izberemo v Fix oknu – v tem primeru bo dokazana le z GDD metodo.
- Če je numerična preveritev uspešna, skušamo trditev dokazati avtomatsko z eno ali več metodami. Povsem običajno je, da program izvede dokaz le v kakšni od metod ali celo v nobeni.
- Analiziramo dokaz.

Analiza dokaza

Algebrajske metode (Wu, Groebnerjeva baza)

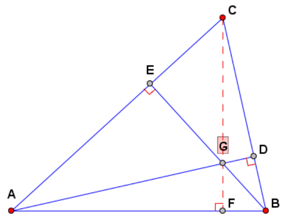
- Skušamo interpretirati predpostavke nedegeneriranosti in .... (Dokaz|Predostavke nedegeneriranosti).
- Pri interpretaciji si pomagamo s pomenom spremenljivk (Dokaz|Polinomi).
- Ukaz (Dokaz|All solutions) lahko pomaga razumeti vzrok neuspešnosti alg. Dokazovanja.

Metoda GDD (in metoda kotov)

- Skušamo razvozlati zapisani dokaz. (Pri tem si lahko pomagamo z lemami (Leme).
- Dokaz dodelamo, predelamo in zapišemo v razumljivejši obliki.

Primer. Višine trikotnika se sekajo v skupni točki.

- V trikotniku ABC načrtamo višine AD, BE, CF, kjer so D, E, F nožišča višin. (Želimo dokazati, da se AD, BE in CF sekajo v skupni točki.)
- G opredelimo kot presečišče AD in BE.
- Dokazujemo lastnost: Kolinearnost točk C,G,F.
- Metoda GDD izdela dokaz v 11 korakih. Uspešni sta tudi algebrski metodi (Wu in GB).



Primer. Fermatova točka

- Nad stranicami trikotnika ABC načrtamo enakostranične trikotnike BCD, CAE, ABF. (Želimo dokazati, da se AD, BE in CF sekajo v skupni točki.)
- G opredelimo kot presečišče AD in BE.
- Dokazujemo lastnost: Kolinearnost točk C,G,F.
- Metoda GDD izdela dokaz v 10 korakih. Algebrski metodi sta neuspešni. Razlog je ta, da v algebrskih enačbah ni informacije, da so vsi enakostranični trikotniki na zunanji strani referenčnega trikotnika.