Elementarna matematika - Osnove modeliranja 2

1. V neki menzi dnevno postrežejo 100 malic po ceni 4 EUR. Zaslužek želijo povečati z zvišanjem cene. Predpostavljajo, da bodo z zvišanjem cene kosila za 10 centov dnevno prodali le 1 malico manj. Poiščite funkcijo, ki modelira dnevni zaslužek v odvisnosti od cene malice, če stroški za pripravo malice znesejo 2 EUR. Kakšen pristop k modelu so si izbrali v menzi (t.j. teoretični, empirični ali simulacijski)? Ali so bile predpostavke smiselne? Kje so pomanjkljivosti tega modela?

2. * V tabeli so podatki o dolžini dneva v nekem kraju, izmerjeni 21. v vsakem mesecu. Modelirajte, kako se v odvisnosti od časa čez leto spreminja dolžina dneva v tem kraju. Pojasnite, zakaj je sinusna funkcija $y = a\sin(bx + c) + d$ primeren model, iz danih podatkov pa skušajte ugotoviti primerne vrednosti nastopajočih parametrov. Opredelite še, za kakšen model gre (t.j. teoretični, simulacijski, empirični).

mesec	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
dolž. dneva (h)	9.1	10.3	11.8	13.5	14.9	15.7	15.4	14.1	12.5	10.8	9.4	8.7

   S pomočjo Geogebre poišči še funkciji, ki se podatkom najbolj prilegata. (Nasvet: Pomagaj si z ukazi PolinomskaTrendnaČrta, EksponentnaTrendnaČrta, SinusnaTrendnaČrta,...)

3. Znanstvenik preučuje odnos med količinama x in y. Opazil je, da se pri dvakratnem povečanju količine x količina y poveča trikrat. Pojasnite, zakaj je potenčna funkcija $y = ax^b$ primeren teoretični model za odnos med obravnavanima količinama.

4. ** Z metodo najmanjših kvadratov poiščite funkcijo a, b in c, $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ki se kar najbolj prilega točkam $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ in $(2, 2)$. (Upoštevaj, da je minimum funkcije kvadrata napake $R^2 = \sum_{i=1}^{m}(y_i - f(x_i))^2$, pri podatkih (x_i, y_i) za $i = 1, 2, \ldots, m$, dosežen pri rešitvah sistema dveh enačb $m\beta + (\sum_{i=1}^{m} x_i)\alpha = \sum_{i=1}^{m} y_i$, $(\sum_{i=1}^{m} x_i)\beta + (\sum_{i=1}^{m} x_i^2)\alpha = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$. Več o tem najdete na spletni strani `http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html`.)

5. Na izbiro imamo dve vrsti sadja. V sadju A je 1 enota vitamina V_1 in 2 enoti vitamina V_3, v sadju B pa 2 enoti vitamina V_1, 2 enoti vitamina V_2 in 1 enota vitamina V_3. Na dan moramo zaužiti vsaj 10 enot vitamina V_1, vsaj 4 enote vitamina V_2 in vsaj 8 enot vitamina V_3. Cena sadja A je 2.5 EUR, cena sadja B pa 7.5 EUR. Kako naj načrtujemo nakup sadja, da porabimo čim manj denarja, ter zadostimo vsem minimalnim potrebam po vitaminih. Odgovor dobro utemeljite.
   (Nasvet: Z metodo linearnega programiranja poiščite minimum funkcije $f(x, y) = 2.5x + 7.5y$ pri pogojih $1x + 2y \geq 10$, $0x + 2y \geq 4$, ter $2x + 1y \geq 8$.)